Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud Novembre 2009

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prend 1 cm comme unité.

Partie A — Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées $(x_{\text{D}},\ y_{\text{D}},\ z_{\text{D}})$ et P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(\text{D}, P) = \frac{\left|ax_{\text{D}} + by_{\text{D}} + cz_{\text{D}} + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, B de coordonnées $(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$, C de coordonnées $(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et D de coordonnées $(4\ ;\ 0\ ;\ -1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.

2. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ est normal au plan (ABC).
Déterminer une équation du plan (ABC).

3. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).

2. Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

1. **a.** Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $(1+\text{i})$.
   b. Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.
   c. Établir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est à dire l'ensemble des points tels que M'=M).

On cherche à généraliser les propriétés **1.b** et **1.c** pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.
   b. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
   c. Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\text{i}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA].
Γ_1 désigne le cercle de diamètre [AI] et Γ_2 désigne le cercle de diamètre [BK].

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(\text{A}) = \text{I}$ et $s(\text{B}) = \text{K}$.
2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.
3. **a.** Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.
   b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(\text{A}\,;\ \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}\ ;\ \frac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.

2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe $z' = \frac{\text{i}}{2}z + 5 + 5\text{i}$.

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.

4. Calculer l'affixe z_{E} du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\text{e}^{-x}}{2-x}\right)\text{d}x$$

1. a. Étudier les variations de la fonction $f\ : x \longmapsto f(x) = \frac{\text{e}^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on a $\frac{1}{\text{e}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \int_0^1 (2+x)\text{e}^{-x}\text{d}x$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x)\text{d}x$.

a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \frac{4}{\text{e}}$.

b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\frac{1}{3\text{e}} \leqslant K \leqslant \frac{1}{6}$.

c. Démontrer que $J + K = 4I$.

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (*A*, *B* et *C*), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « *BBAAC* » signifie que le candidat a répondu *B* aux première et deuxième questions, *A* aux troisième et quatrième questions et *C* à la cinquième question.

1. a. Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
Calculer la probabilité des événements suivants :
E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \dfrac{32}{243}$.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.